Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) On commence par calculer le *discriminant* :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution (réelle)
- Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution (dite « racine double ») :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions (appelées aussi « racines »du trinôme $ax^2 + bx + c$) :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a pour toute valeur de x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour toute valeur de x distincte de x_0. De plus, $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines. De plus, $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

La phrase « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines »résume en fait toutes les situations.

Remarque Si $ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a nécessairement 2 solutions (la réciproque est fausse).

Somme et produit des racines Si $\Delta \geq 0$, on a : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Application : pour trouver deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P, il suffit de résoudre l'équation $X^2 - SX + P = 0$ dont les solutions, si elles existent, sont les deux nombres cherchés.